§13. Weitere Anwendungen

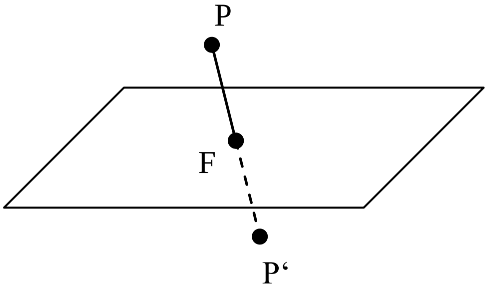
1. Lotfuß- und Spiegelpunkt

Um den *Lotfußpunkt F* eines Lots von einem Punkt auf eine Ebene zu bestimmen, verfährt man so:

① Stelle die Gleichung der Lotgerade von P auf E (Aufhängepunkt ist P und der RV ist der Normalenvektor der Ebene).

② Schneide die Gerade mit der Ebene (der gesuchte Fußpunkt ist der Schnittpunkt).

Anmerkung: Fußpunkt eines Lots auf eine Gerade: → Abstand Punkt-Gerade (vgl. §11 | 2.)



③ Der *Spiegelpunkt P‘* ergibt sich (sowohl bei Spiegelung an Gerade, als auch an Ebene) aus: $\vec{P'} = \vec{P} + 2\vec{PF}$ oder $\vec{P'} = \vec{F} + \vec{PF}$

Dazu muss immer zuerst der Fußpunkt berechnet werden!

Beispiel: E: $2x_1 + x_3 - 14 = 0$ P(4|2|1)

① Lotgerade: $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② l in E einsetzen: $2(4 + 2\lambda) + (1 + \lambda) - 14 = 0$; $\lambda = 1$; F (6|2|2)

③ Spiegelpunkt: $\vec{P'} = \vec{F} + \vec{PF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-4 \\ 2-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ P‘ (8|2|3)

2. Geometrische Figuren in der Vektorrechnung

Parallelogramm: Gegenüberliegende Seitenvektoren haben dieselbe Richtung und denselben Betrag und die Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

Zeige:
- ▶ $\vec{AB} = \vec{DC}$
- ▶ $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$ sind linear unabhängig

Rechteck: Parallelogramm, aber ein Eckwinkel ist 90° (damit sind alle 4 Winkel 90°)

Zeige:
- ▶ $\vec{AB} = \vec{DC}$
- ▶ $\vec{AB} \circ \vec{AD} = 0$ (rechter Winkel bei A)

Quadrat: Rechteck, 2 nebeneinanderliegende Seiten (damit alle 4) gleichlang

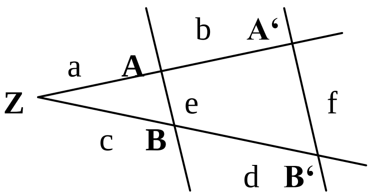
Zeige:
- ▶ $\vec{AB} = \vec{DC}$
- ▶ $\vec{AB} \circ \vec{AD} = 0$ (rechter Winkel bei A)

▶ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ (An A anliegende Seiten gleichlang)

<u>Dreieck:</u> Punkte liegen nicht auf einer Geraden (lineare Unabhängigkeit zweier Seitenvektoren)

Zeige: ▶ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig

3. Anwendung des Strahlensatzes



Es gelten die Beziehungen

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ohne parallele Seiten)
- $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$ (mit parallelen Seiten – Start bei Z)

Weiter gilt:

- Streckungsfaktor, mit dem der Punkt A auf A' (aber auch B auf B' oder die Strecke e auf f) bei der zentrischen Streckung an Z abgebildet wird: $k = \frac{a+b}{a}\left(= \frac{c+d}{c} = \frac{f}{e}\right)$
- Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ZA'B' und ZAB: $\frac{A_{\Delta ZA'B'}}{A_{\Delta ZAB}} = k^2$

  → Verhältnis der Teilflächen (Dreieck ZAB zu Trapez ABB'A'):

  Bedenken, dass gilt: $A_{\Delta ZA'B'} = A_{\Delta} + A_{Trapez}$
- Verhältnis der Volumina zweier Pyramiden (bzw. Kegel), die durch eine Ebene in 2 Teile geteilt werden, so dass obige Figur ein Schnitt durch die Pyramide/Kegel ist: $\frac{V'}{V} = k^3$

  → Verhältnis der Teilvolumina (Spitze zu Pyramidenstumpf):

  Bedenken, dass gilt: $V_{Pyramide} = V_{Spitze} + V_{Stumpf}$

<u>Beispiel:</u>

Eine Pyramide wird durch eine Ebene parallel zur Grundfläche auf einem Drittel der Höhe geschnitten. Wie verhalten sich die Volumina der beiden entstehenden Teilkörper?

Faktor: $k = 3/2$ (Höhe große Pyramide zu Höhe kleiner Pyramide)
Volumenverhältnis: $k^3 = 27/8$

Also ist das Volumen der gesamten Pyramide 27/8 mal so groß wie das der kleinen Pyramide. Damit ist der Stumpf (27/8 – 1)-mal so groß wie die kleine Pyramide. Also: $\frac{V_{Pyramide(klein)}}{V_{Stumpf}} = \frac{1}{\frac{27}{8}-1} = \frac{1}{\frac{19}{8}} = \frac{8}{19}$