§ 11. Abstandsprobleme

1. Punkt–Punkt:

Bestimme den Verbindungsvektor der beiden Punkte P und Q und berechne seinen Betrag.

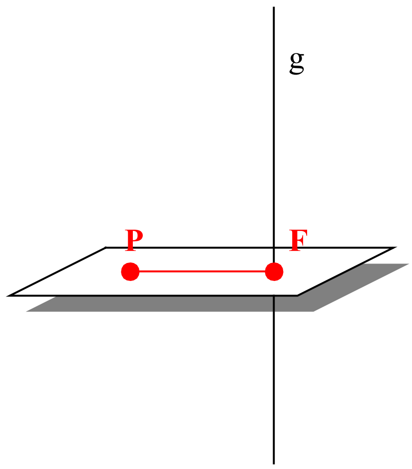
d(P;Q) = $|\vec{q} - \vec{p}|$

2. Punkt–Gerade

① Bestimme die Normalenform einer Hilfsebene H, die P enthält und senkrecht zur Geraden g steht. (Hier ist der RV der Geraden der Normalenvektor und P der Aufhängepunkt)

② Bestimme durch Einsetzen von g in die Ebene den Schnittpunkt F von Ebene und Gerade
Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lots von P auf g.

③ Der Abstand d(P;g) ist dann $\left|\overrightarrow{PF}\right|$



Beispiel:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ P(0 | 1 | 2)

① $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ H: $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right] = 0$

H: $x_1 + 2x_3 - 4 = 0$ (NF)

② g in H: $1 + \mu + 2(3 + 2\mu) - 4 = 0$ $\Rightarrow$ $\mu = -1$

µ in g: $\vec{f} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ F(2 | 2 | 1)

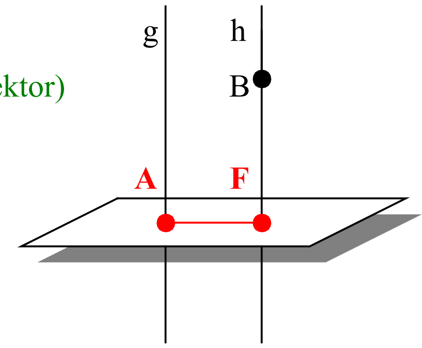
③ d(P;g) = $\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix}2-0\\2-1\\1-2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6}$

3. Punkt–Ebene

Einsetzen von P in die linke Seite der HNF der Ebene

4. Gerade–Gerade

a) Parallel Wie bei 2.:



- Hilfsebene H, die senkrecht auf die Geraden steht (RV ist Normalenvektor) und den Aufhängepunkt A der einen Geraden g enthält;
- Schnittpunkt F von Hilfsebene und der anderen Geraden h bestimmen.

  d(g;h) = $\left|\overrightarrow{AF}\right|$

b) Windschief

① Hilfsebene E in Parameterform, die g enthält und || zu h ist (RV von g und h verwenden)

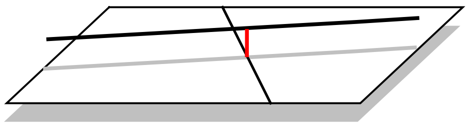
② HNF von E ermitteln

③ Aufhängepunkt von h in linke Seite der HNF einsetzen (denn der Abstand des Geradenaufhängepunkts und E ist der gesuchte)

Beispiel: Zeige, dass die Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

windschief sind und bestimme dann ihren Abstand.



Lösung:

Teil a) g und h windschief:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 4 = 0 \quad (f)$$

RV linear unabhängig

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad -2 = \lambda \\ \Rightarrow -6 = \mu - 3\lambda \Rightarrow -6 = \mu + 6 \Rightarrow -12 = \mu \\ \Rightarrow 1 = 2\mu - 2\lambda \Rightarrow 1 = 2\mu - 2\lambda \end{array}$$

λ und μ in III $1 = 2\cdot(-12) - 2\cdot(-2)$
$1 = -20$ (f)

$\Rightarrow$ g und h sind windschief.

Teil b) Abstand:

① E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

② $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}| = 3$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0$ (NF)

$\frac{2}{3} x_1 - \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 - 2 = 0$ (HNF)

③ d (g; h) $= |\frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 - 2| = |\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} - 2| = |-3| = 3$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden beträgt 3.

5. Gerade–Ebene

„Abstand" macht nur Sinn, wenn man zuvor gezeigt hat, dass Gerade und Ebene parallel sind

Dann bestimmt man den Abstand des Aufhängepunkts der Geraden von der Ebene:

① HNF der Ebene bestimmen

② Aufhängepunkt der Gerade in linke Seite der HNF einsetzen und vereinfachen.

6. Ebene–Ebene

„Abstand" macht nur Sinn, wenn man zuvor gezeigt hat, dass die Ebenen parallel sind

Dann bestimmt man den Abstand eines beliebigen Punktes der einer der Ebenen von der anderen Ebene:

① HNF der einen Ebene bestimmen

② Aufhängepunkt der anderen Ebene in linke Seite der HNF einsetzen und vereinfachen.

7. Kugel (im Raum) und Kreis (in der Ebene)

Alle Punkte X, die von einem Punkt M einen festen Abstand r > 0 haben, liegen auf der Kugeloberfläche bzw. Kreislinie um M mit Radius r.
Gleichung: $|\vec{x} - \vec{m}| = r$ (vgl. §07)

Beispiel:
Bestimme die gegenseitige Lage der Gerade

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

und des Kreises um M(1/1) mit Radius r = $2\sqrt{2}$.

Lösung:
Kreisgleichung bestimmen:

k: $\left| \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{2}$ bzw. k: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 8$

Gerade in Kreis einsetzen und vereinfachen:

g in k: $\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 8$

$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 8$

$(3 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 = 8$

$9 + 6\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 8$

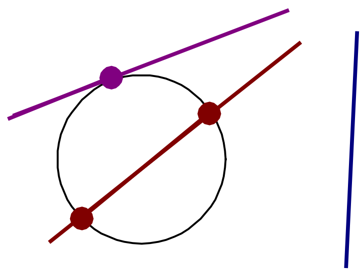
$2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$

Interpretation::

keine Lösung: Gerade ist Passante (kein Schnittpunkt)

genau 1 Lösung: Gerade ist Tangente (1 Berührpunkt)

genau 2 Lösung: Gerade ist Sekante (2 Schnittpunkte)



$2(\mu+1)^2 = 0$ => $\mu = -1$ Gerade ist Tangente an den Kreis,

Berührpunkt: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ => B(3/3)

8. Einsetzen oder Gleichsetzen?

PF: Parameter-; NF: Normalenform

Gegeben:	Vorgang:
NF – PF	PF in NF einsetzen
PF – PF	PF und PF „gleichsetzen“ (bei 2 Ebenen besser: eine Ebene in NF verwandeln)
NF – NF	beide NF als GLS mit 2 Gleichungen lösen (bei 3 Unbekannten: 1 frei wählbar)