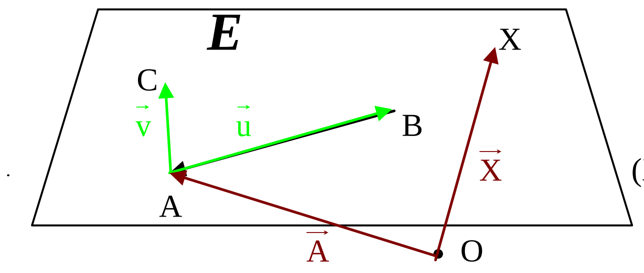
# §10. Die Ebene

## 1. Parameterform




(X ist beliebiger Punkt auf E)

Um eine Ebene festzulegen, benötigt man
- den Ortsvektor $\vec{A}$ des Aufhängepunkts und
- zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Gleichung in Parameterform: E: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Beispiele:

a) $x_1 - x_2$ – Ebene des Koordinatensystems im Raum: (Vgl. §02)

Aufhängepunkt ist hier:

Richtungsvektoren: $\vec{u}$ = $\vec{v}$ =

Also: E:

b) Ebene durch die Punkte A(1|2|3) und B(5|–2|–5) C(0|1|1)

Aufhängepunkt ist hier:

Richtungsvektoren: •

•

Also: E:

## 2. Normalenvektor

Ein Vektor $\vec{n}$, der auf einer Ebene senkrecht steht, heißt Normalenvektor der Ebene

Bestimmung des Normalenvektors *mit Vektorprodukt* $\vec{u} \times \vec{v}$ (vgl. §06)

Beispiel:

E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \\ -[1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2)] \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Auch bei $\vec{n}$ kommt es nur auf die Richtung, nicht auf Länge und Orientierung an. Man kann also $\vec{u} \times \vec{v}$ durch eine beliebige Zahl dividieren/multiplizieren, um den Vektor $\vec{n}$ zu erhalten.

**3. Normalenform**

Eine Ebene E kann (im Raum) durch folgende Gleichung beschrieben werden:

E: $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ (NF)  dabei ist $\vec{n}$ der Normalenvektor von E

Benötigt wird hier
– der Ortsvektor $\vec{A}$ eines beliebigen Punktes A auf E (z.B. Aufhängepunkt)
– ein Normalenvektor $\vec{n}$ von E

Jeder Gleichung ist eindeutig eine Ebene zugeordnet. Jedoch ist nicht einer Ebene eindeutig eine Gleichung zugeordnet (Normalenvektor kann in Länge und Orientierung noch variieren.)

Beispiel:

Ebene E aus 2. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Einsetzen in $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$  $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{X} - 8 = 0$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$ (NF)  (*Normalenform in Koordinatendarstellung*)

Besondere Ebenen:

$x_3 = 0$ ______________________________

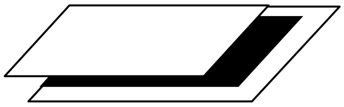
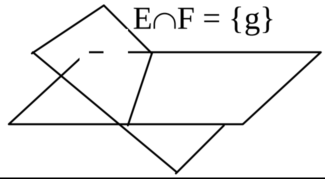
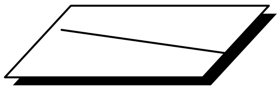
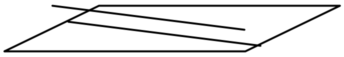
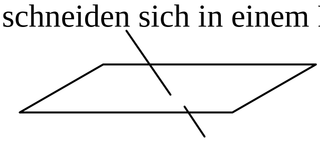
$x_2 = 6$ ______________________________

$x_1 + x_3 + 5 = 0$ ______________________________

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$: ______________________________

## 4. Gegenseitige Lage von 2 Ebenen E und F bzw. einer Gerade g und einer Ebene E

3 Möglichkeiten:

| E und F sind identisch<br>$E \equiv F$ | E und F sind echt parallel<br>$E \parallel F$ | E und F schneiden in einer Geraden<br>$E \cap F = \{g\}$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| g liegt in E | E und g sind echt parallel | E und g schneiden sich in einem Punkt |
|  |  |  |

Merke:
Die Schnittgeraden einer Ebene E mit den Koordinatenebenen nennt man *Spurgeraden*, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen *Spurpunkte*.

a) Parameterform – Normalenform (Ebene-Ebene bzw. Gerade-Ebene):

Man setzt die Parameterform der einen Ebene (bzw. der Gerade) in die Normalenform der anderen Ebene ein und löst nach einem der Parameter auf.

Beispiel

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } F: 2x_1 - x_2 - 8 = 0$$

① E in F: $2\cdot(1 + \lambda + 0\mu) - (-2 + 0\lambda + 1\mu) - 8 = 0$

$2 + 2\lambda + 2 - \mu - 8 = 0$

$-4 + 2\lambda = \mu$

Hier 3 Möglichkeiten:

**1** Ergebnis (z.B. wie oben, oder Zahlenwert für einen Parameter) → Ebenen E und F schneiden sich (g und E schneiden sich)

**2** wahre Aussage → Ebenen sind identisch (g liegt in E)

**3** falsche Aussage → Ebenen sind echt parallel (g und E sind parallel)

② Einsetzen von μ im E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + (-4 + 2\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

③ Auflösen der Klammer und sortieren der Vektoren:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{Schnittgerade } s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) 2 Ebenen in Normalenform (nur Ebene-Ebene):

Man löst das Gleichungssystem (3 Unbekannte aber nur 2 Gleichungen; 1 Variable frei wählbar z.B. $\lambda$; falls eine Variable in beiden Gleichungen nicht vorkommt, *muss* diese frei gewählt werden)

Beispiel: E: $2x_1 - x_3 - 4 = 0$ F: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2 = 0$

$2x_1 - x_3 = 4$ Wähle $x_3 = \lambda$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$

(I) $2x_1 = 4 + \lambda$

(II) $2x_1 - x_2 = 2 - 3\lambda$

(II)–(II) $x_2 = 2 + 4\lambda$

Einsetzen in (II): $2x_1 - (2 + 4\lambda) = 2 - 3\lambda$

$2x_1 - 2 - 4\lambda = 2 - 3\lambda$

$2x_1 = 4 - \lambda$

$x_1 = 2 - 0{,}5\lambda$

Hier 3 Möglichkeiten:

Ergebnis für $x_1\ x_2\ x_3$ $\rightarrow$ Ebenen schneiden sich in einer Geraden

wahre Aussage $\rightarrow$ Ebenen sind identisch

falsche Aussage $\rightarrow$ Ebenen sind echt parallel

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden s durch zeilenweises Einsetzen:

$$s:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

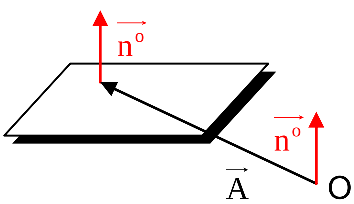
**5. Die Hessesche Normalenform (HNF)**

Die Normalenform einer Ebene E ist nicht eindeutig, da der Normalenvektor beliebige Orientierung sowie Länge besitzt.

Verwendet man den vom Ursprung zur Ebene zeigenden Einheitsvektor $\vec{n}^{o} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ von $\vec{n}$, so erhält man die Hesseform der Normalengleichung (*HNF*) (eindeutig!): $\vec{n}^{o} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$

Anmerkung zur Orientierung:

Zeigt der Normalenvektor vom Ursprung zur Ebene, so liegt der Winkel $\varphi$ zwischen den Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{n}$ zwischen 0° und 90°, der $\cos\varphi$ ist positiv, also auch das Skalarprodukt $\vec{A} \circ \vec{n} > 0$.




Da dieses Skalarprodukt die Konstante hinter dem „–“ ergibt, muss vor der Konstante ein Minus stehen.

Beispiel:

geg.: E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (aus 1.) ges.: HNF von E

Lösung:

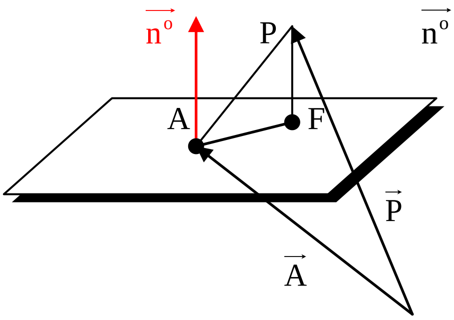
① Bestimme die NF von E (wie in 1.)
E: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$ (NF)

② Bestimme $|\vec{n}|$: $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

③ *Teile die Koordinatenform der NF durch diesen Betrag und achte darauf, dass die Konstante ein – als Vorzeichen hat. (Gegebenenfalls mit –1 multiplizieren)*

$$\frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{14}} = 0 \quad \text{(HNF)}$$

Anwendung:
Setzt man den Ortsvektor eines Punkts P ∉ E in die linke Seite der HNF:




$$\vec{n^o} \circ (\vec{P} - \vec{A}) = |\vec{n^o}| \cdot |(\vec{P} - \vec{A})| \cos\phi = \quad \text{(vgl Skalarprodukt §05 | 3.)}$$

$$= 1 \cdot \overline{AP} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{AP}} = \overline{PF}$$

Hinweise: • $\cos\varphi = \frac{\text{Ankath}}{\text{Hypoth}}$

• Länge eines Einheitsvektors ist immer 1.

Satz:
Eine Ebene E sei durch ihre HNF

$$E:\ \vec{n^o} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

gegeben und ein Punkt P (mit Ortsvektor $\vec{P}$) außerhalb der Ebene, so gilt

$$\vec{n^o} \circ (\vec{P} - \vec{A}) = d$$

wobei e = |d| der Abstand d(P; E) von P zur Ebene E ist.
Das Vorzeichen von d gibt an, ob P und der Ursprung O auf derselben Seite (d < 0) oder auf verschiedenen Seiten (d > 0) von E liegen.

Beispiel:

Bestimme den Abstand des Punktes P(1|2|3) von der Ebene E: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$

① Bestimme die HNF von E (wie in 1.)

$$\frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{14}} = 0 \quad \text{(HNF)}$$

② Setze P in die linke Seite ein:

$$d(P; E) = e = \left|\frac{2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 3 - 8}{\sqrt{14}}\right| = \left|\frac{-9}{\sqrt{14}}\right| = \frac{9}{\sqrt{14}} \quad \text{( P liegt auf derselben Seite von E, wie O)}$$