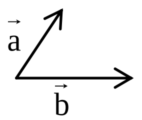
§08. Lineare Abhängigkeit

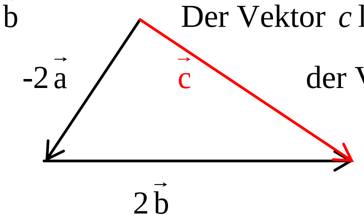
Definition:

Den Ausdruck $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_n \cdot \overrightarrow{a_n}$ (mit $\lambda_1; \lambda_2; ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$) nennt man *Linearkombination* der Vektoren $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; ...; \overrightarrow{a_n}$

Beispiel:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$





Der Vektor $\vec{c}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schreiben:

$$\vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

Definition:

Gegeben sind n Vektoren $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; ...; \overrightarrow{a_n}$. Lässt sich mindestens einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen, so nennt man die Vektoren $\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; ...; \overrightarrow{a_n}$ *linear abhängig*, ansonsten *linear unabhängig*.

Beispiele:

a) 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

- Zur Überprüfung verwendet man die Beziehung $\vec{a} = \lambda \vec{b}$
  Erhält man in jeder Zeile denselben Wert, so sind die Vektoren linear abhängig,
  erhält man in mindestens 2 Zeilen verschiedene Werte oder in einer Zeile eine falsche Aussage (z.B. 1 = 0), so sind die Vektoren linear unabhängig.

  geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} => \lambda = -0,5 \\ => \lambda = -0,5 \\ => \lambda = -0,5 \end{matrix}$ also: $\vec{a}; \vec{b}$ lin. abhängig

  geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} => \lambda = -0,5 \\ => \quad \lambda = 1 \\ => 3 = 0 \ (f) \end{matrix}$ also: $\vec{a}; \vec{b}$ lin. unabhängig

- Zwei linear abhängige Vektoren besitzen dieselbe Richtung
  (sie sind *parallel* bzw. *kollinear*)

- Die Repräsentanten zweier (auch unabhängiger) Vektoren kann man immer in eine Ebene legen (die beiden Vektoren sind stets *komplanar*)

b) 3 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

- Zur Überprüfung verwendet man die Beziehung $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$

  Man erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den zwei Unbekannten λ und μ. Hierzu löst man zwei Gleichungen und muss die beiden Unbekannten in die 3. Gleichung einsetzen. Entsteht beim Einsetzen eine wahre Aussage (z.B. 0 = 0), so sind die Vektoren linear abhängig.

  Entsteht beim Lösen an irgendeiner Stelle eine falsche Aussage, so sind die Vektoren linear unabhängig.

  geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

  Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 = \lambda + 5\mu \\ \text{(II)} & 2 = 2\lambda + 10\mu \\ \text{(III)} & 3 = 6\mu \end{array}$

  Am einfachsten sind die Gleichungen (I) und (III) zu lösen. (Hier Einsetzverfahren verwenden)

  Aus (III) folgt: $\mu = 0,5$

  μ in (I) 1 = λ +2,5 => λ = –1,5

  Nun muss man in die *verbleibende* Gleichung (II) *beide* Werte einsetzen:

  λ, μ in (II) 2 = 2·(–1,5) + 10·0,5
  2 = –3 + 5
  2 = 2 (w)

  Vektoren linear abhängig.

  geg.: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

  Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 = \lambda \\ \text{(II)} & 2 = 2\lambda + \mu \\ \text{(III)} & 3 = 6\mu \quad \Rightarrow \mu = 0,5 \end{array}$

  Hier stehen die Lösungen für die Parameter schon da. Also muss man nur noch in die verbleibende Gleichung (II) beide Werte einsetzen:

  λ, μ in (II) 2 = 2·1 + 0,5
  2 = 2,5 (f)

  Vektoren linear unabhängig.

- Die Repräsentanten von drei linear abhängigen Vektoren kann man immer in eine Ebene legen (drei linear abhängige Vektoren sind stets *komplanar*)

Weitere Eigenschaften:

- In der Ebene gibt es maximal 2 linear unabhängige Vektoren („2-dimensional“)
- Im Raum gibt es maximal 3 linear unabhängige Vektoren („3-dimensional“)