§07. Die Kugel

Alle Punkte $X(x_1|x_2|x_3)$, die von einem Punkt $M(m_1|m_2|m_3)$ einen festen Abstand $r > 0$ haben, liegen auf der Kugeloberfläche (im Raum) bzw. Kreislinie (in der Ebene) um M mit Radius r.

Gleichung: $\left|\vec{X}-\vec{M}\right| = r$

bzw.:

Kugel- bzw. Kreisgleichung (Mittelpunkt M, Radius r):

$\left(\vec{X}-\vec{M}\right)^2 = r^2$ (vektorielle Form)

$(x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 + (x_3-m_3)^2 = r^2$ (Koordinatenform)

Beispiel:

Für welche c liegt der Punkt C(4|2|c) auf der Kugeloberfläche der Kugel um M(2|2|3) mit Radius $\sqrt{5}$?

① Kugelgleichung

$$\left(\vec{X}-\vec{M}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right)^2 = \sqrt{5}^2$$

(Hier nicht gefragt: Kugel in Koordinatenform: $(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2 = 5$)

② Ortsvektor von Punkt C für $\vec{x}$ einsetzen und vereinfachen:

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right)^2 = \sqrt{5}^2 \;;\quad \begin{pmatrix}2\\0\\c-3\end{pmatrix}^2 = 5$$

$4 + (c-3)^2 = 5$

$4 + c^2 - 6c + 9 = 5$

$c^2 - 6c + 8 = 0$

$(c-4)(c-2) = 0$

Für $c_1 = 4$; $c_2 = 2$ liegt C auf der Kugel.

Hinweis:

Für Punkte C außerhalb der Kugel gilt die Ungleichung $4 + (c-3)^2 > 5$, bzw. $(c-4)(c-2) > 0$

Für Punkte C innerhalb der Kugel gilt die Ungleichung $4 + (c-3)^2 < 5$, bzw. $(c-4)(c-2) < 0$

Lösen der Ungleichung z. B. mit VZ-Tabelle

		2	4
(c – 2)	–	+	+
(c – 4)	–	–	+
(c – 2)(c – 4)	+	–	+