§06. Das Vektorprodukt

1. Berechnung des Vektorprodukts

Das Produkt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$, das 2 Vektoren einen dritten Vektor zuordnet, heißt *Vektorprodukt*.

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Es gilt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ (φ ist der Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$)

Die Orientierung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ ermittelt man mit der rechten Hand:
Hand in Orientierung von $\vec{a}$, Abknicken in Orientierung von $\vec{b}$, abgespreizter Daumen gibt die Orientierung von $\vec{a} \times \vec{b}$ an.

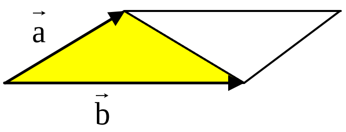
Beispiel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \\ -[1 \cdot 3 - 0 \cdot (-2)] \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Anwendungen

- Flächeninhalt eines Parallelogramms/Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$ erzeugt wird:

  $A_P = |\vec{a} \times \vec{b}|$ bzw. $A_\Delta = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$



- Volumen eines Spats, der von den Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ erzeugt wird:
  $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$