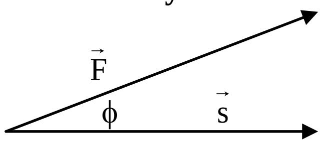
§05. Das Skalarprodukt

1. Betrag eines Vektors:

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Maßzahl der Länge eines seiner Repräsentanten. Schreibweise: $|\vec{a}|$ oder a.

2. Beispiel aus der Physik



$W = F \cdot s \cdot \cos\phi$

Verknüpfung der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ führt zum Skalar (Zahl) W

3. Definition:

Die Verknüpfung der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\phi$ (mit $0° \le \phi \le 180°$),

die jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zuordnet, nennt man *Skalarprodukt*.

4. Skalarprodukt in Koordinatenschreibweise:

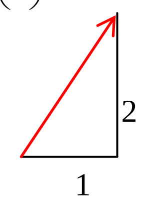
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

<u>Beispiele:</u>

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 + 5 - 3 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 = 5$$



Es gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

Es gilt für die Länge $\overline{AB}$ einer Strecke [AB]: $\overline{AB} = \left|\vec{B} - \vec{A}\right| = \sqrt{\left(\vec{B} - \vec{A}\right) \circ \left(\vec{B} - \vec{A}\right)}$

<u>Beispiel:</u> A(1|–2|3) B(–3|0|6)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 0+2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Einheitsvektoren

Gegeben ist ein beliebiger Vektor $\vec{a}$.

Ein Vektor mit Länge 1, der dieselbe Richtung und Orientierung wie ein Vektor $\vec{a}$ besitzt, heißt Einheitsvektor von $\vec{a}$ (Schreibweise: $\overrightarrow{a^\circ}$ oder $\overrightarrow{a_\circ}$). Statt „Bestimme den Einheitsvektor von $\vec{a}$!" sagt man auch „Normiere $\vec{a}$!"

Es gilt: $\overrightarrow{a^\circ} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \qquad \overrightarrow{a^\circ} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

6. Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\phi = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

- ► ϕ nennt man den *Zwischenwinkel der Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$.
- ► Ist $\phi = 90°$, so sagt man: „Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander" oder „$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal"
- ► Für zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\vec{a}$ o $\vec{b} = 0$
- ► Schneiden sich 2 Geraden so nennt man den kleinsten Winkel, den sie miteinander bilden *Schnittwinkel der Geraden*.

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\phi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{3-8}{5\cdot\sqrt{5}} = -\frac{5}{5\cdot\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \phi = 116{,}57°$$

7. Winkelhalbierender Vektor

$$\vec{w} = \overrightarrow{a^\circ} + \overrightarrow{b^\circ}$$