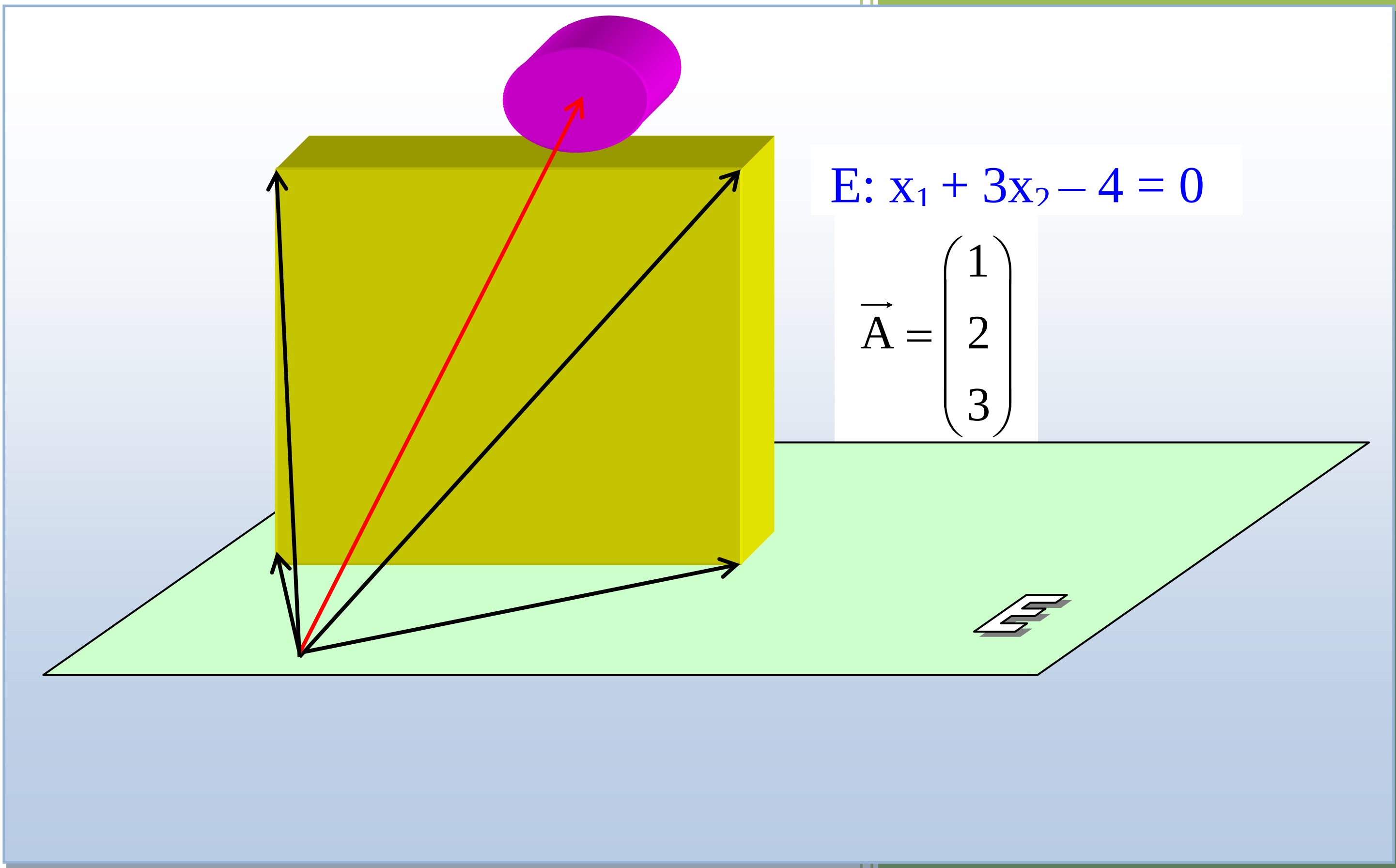
Skripten für die Oberstufe

Geometrie Q11 und Q12



www.drothler.net

Inhalt

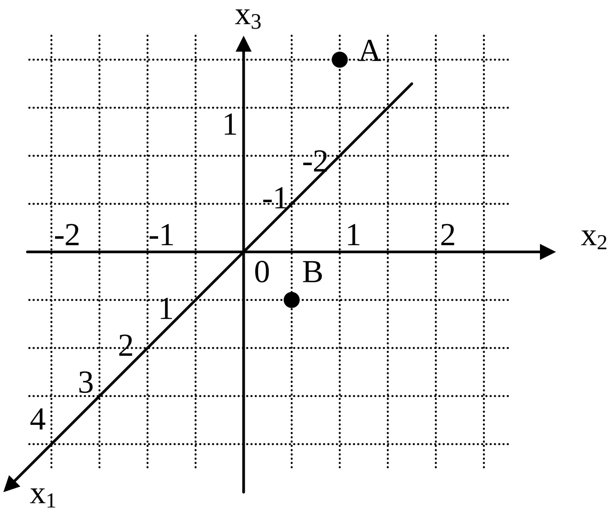
§01. Das räumliche Koordinatensystem

1. Punkte im Koordinatensystem:

Im Raum wird ein Punkt durch 3 Koordinaten festgelegt.

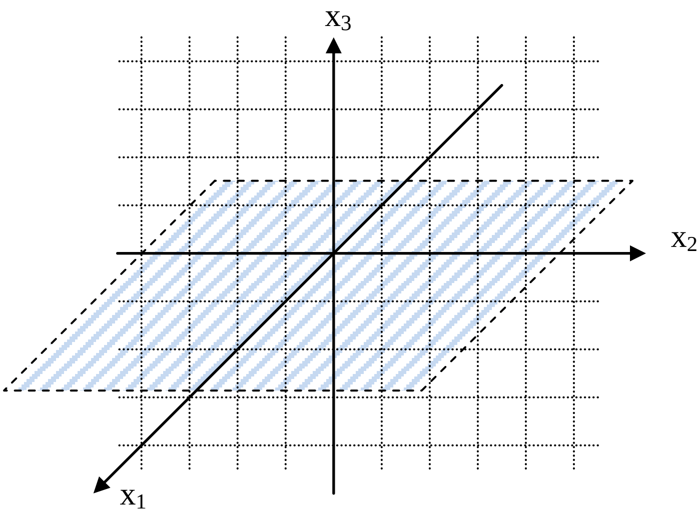
Z.B. A(2 | 3 | 2)   B(–3| – 1| –2)

x_1 x_2 x_3

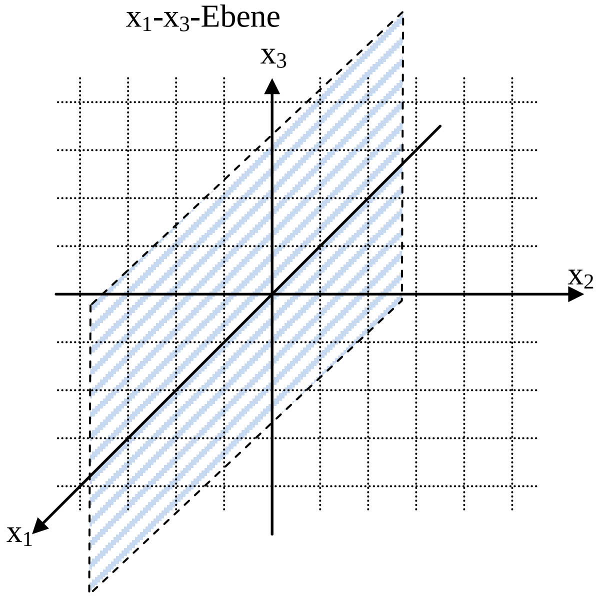


2. Koordinatenebenen

z.B. x_1-x_2-Ebene



x_1-x_3-Ebene



§02. Vektoren

<u>Definition</u>

Die Menge aller gerichteten Strecken im Raum, die

- gleiche Länge,
- gleiche Richtung und
- gleiche Orientierung besitzen,

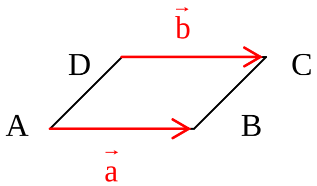
nennt man *Vektor*. Ein Element dieser Menge heißt *Repräsentant des Vektors*.

<u>Schreibweisen:</u>

- Kleine lat. Buchstaben mit Pfeil: $\vec{a};\ \vec{b};\ \vec{c};\ \vec{d};\ \vec{e};\ \vec{f};\ \vec{o};\ \vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w};\ \vec{x}$
- Als Verbindung zweier Punkte: $\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{XA};...$

<u>Beispiel:</u>

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a} = \vec{b}$

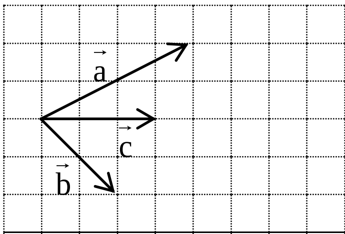


<u>Definitionen:</u>

1. Der Vektor, dessen Repräsentanten die Länge 0 haben, heißt Nullvektor $\vec{o}$.
2. Ein Vektor $\vec{a}$ heißt parallel zu einem Vektor $\vec{b}$, wenn die Repräsentanten von $\vec{a}$ zu denen von $\vec{b}$ parallel sind. Zum Nullvektor ist jeder Vektor parallel.
3. Ein Vektor heißt Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$, wenn sich seine Repräsentanten nur in der Orientierung unterscheiden. Er wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.

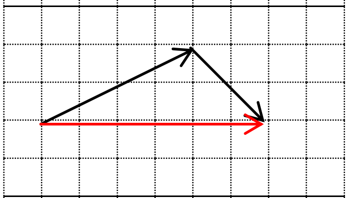
§03. Vektorketten

Gegeben sind drei Vektoren (nebenstehend):

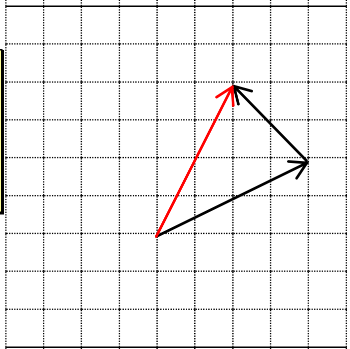


1. Addition von Vektoren:

Der Fußpunkt des einen Repräsentanten wird an die Spitze des anderen gesetzt. Der Repräsentant der Summe verläuft vom Fußpunkt des ersten zur Spitze des zweiten Summanden.



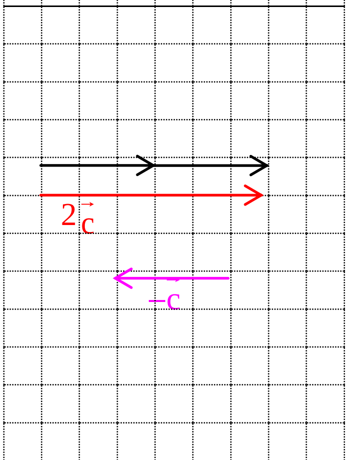
> Definition:
> Statt $\vec{a} + (-\vec{b})$ schreibt man auch $\vec{a} - \vec{b}$.
> Einen Vektor subtrahiert man, indem man seinen Gegenvektor addiert.



2. Multiplikation mit einer reellen Zahl

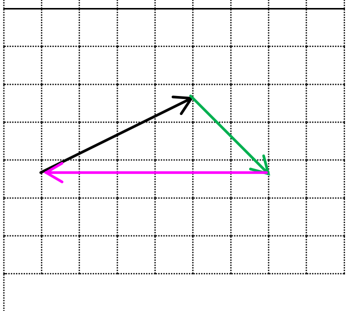
> Definition:
> Multipliziert man einen Vektor $\vec{c}$ mit einer reellen Zahl $\lambda > 0$, so haben die Repräsentanten $\lambda\vec{c}$ die λ-fache Länge, die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{c}$.

Der Vektor $-1\vec{c}$ ist der Gegenvektor von $\vec{c}$.



3. Geschlossene Vektorketten

> Definition:
> Eine *geschlosseneVektorkette* ist eine mehrgliedrige Summe mit dem Summenvektor $\vec{o}$.



Hier: $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = \vec{o}$

§04. Spaltenvektoren

1. Koordinatendarstellung

Man schreibt: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, falls $\vec{a}$ in der Ebene bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, falls $\vec{a}$ im Raum liegt.

Rechenregeln:

① $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

② $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

③ Nullvektor: $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel: Berechne $3\vec{a} - 2\vec{b}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ -6 + 12 \\ 9 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Ortsvektoren

Satz und Definition:

Jedem Vektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist so eindeutig ein Punkt $A(a_1 | a_2 | a_3)$ mit $\vec{A} = \overrightarrow{OA}$ (O: Ursprung) zugeordnet.

a_1, a_2, a_3 heißen *die Koordinaten von A bzw.* $\vec{A}$. Der Vektor $\vec{A}$ heißt *Ortsvektor des Punkts A*.

3. Verbindungsvektor

Der Verbindungsvektor zweier Punkte A und B errechnet sich aus $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

Beispiel: A(1|–2|3) B(–3|0|6)

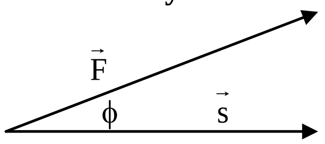
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 0 + 2 \\ 6 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

§05. Das Skalarprodukt

1. Betrag eines Vektors:

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Maßzahl der Länge eines seiner Repräsentanten. Schreibweise: $|\vec{a}|$ oder a.

2. Beispiel aus der Physik



$W = F \cdot s \cdot \cos\phi$

Verknüpfung der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ führt zum Skalar (Zahl) W

3. Definition

Die Verknüpfung der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$

$\vec{a} \circ \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\phi$ (mit $0° \leq \phi \leq 180°$),

die jedem Vektorpaar eine reelle Zahl zuordnet, nennt man *Skalarprodukt*.

4. Skalarprodukt in Koordinatenschreibweise:

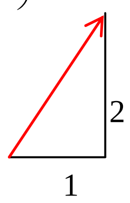
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

<u>Beispiele:</u>

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 + 5 - 3 = 12$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 = 5$$



Es gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$

Es gilt für die Länge $\overline{AB}$ einer Strecke [AB]: $\overline{AB} = \left|\vec{B} - \vec{A}\right| = \sqrt{\left(\vec{B} - \vec{A}\right) \circ \left(\vec{B} - \vec{A}\right)}$

<u>Beispiel:</u> A(1|–2|3) B(–3|0|6)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 0+2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Einheitsvektoren

Gegeben ist ein beliebiger Vektor $\vec{a}$.

Ein Vektor mit Länge 1, der dieselbe Richtung und Orientierung wie ein Vektor $\vec{a}$ besitzt, heißt Einheitsvektor von $\vec{a}$ (Schreibweise: $\overrightarrow{a^\circ}$ oder $\overrightarrow{a_\circ}$). Statt „Bestimme den Einheitsvektor von $\vec{a}$!“ sagt man auch „Normiere $\vec{a}$!“

Es gilt: $\overrightarrow{a^\circ} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Beispiel:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ $\quad \overrightarrow{a^\circ} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

6. Winkel zwischen Vektoren

$\cos\phi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

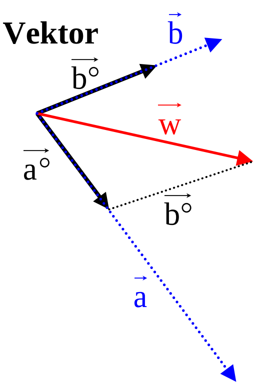
- ϕ nennt man den *Zwischenwinkel der Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$.
- Ist $\phi = 90°$, so sagt man: „Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander“ oder „$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal“
- Für zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Schneiden sich 2 Geraden so nennt man den kleinsten Winkel, den sie miteinander bilden *Schnittwinkel der Geraden*.

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\phi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+4^2} \cdot \sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{3-8}{5 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{5}{5 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \phi = 116{,}57°$$

7. Winkelhalbierender Vektor

$\vec{w} = \overrightarrow{a^\circ} + \overrightarrow{b^\circ}$



§06. Das Vektorprodukt

1. Berechnung des Vektorprodukts

Das Produkt $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\-(a_1b_3-a_3b_1)\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$, das 2 Vektoren einen dritten Vektor zuordnet, heißt *Vektorprodukt*.

Der Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ ist orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
Es gilt: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$ (φ ist der Zwischenwinkel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$)

Die Orientierung des Vektors $\vec{a}\times\vec{b}$ ermittelt man mit der rechten Hand:
Hand in Orientierung von $\vec{a}$, Abknicken in Orientierung von $\vec{b}$, abgespreizter Daumen gibt die Orientierung von $\vec{a}\times\vec{b}$ an.

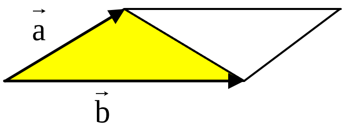
Beispiel:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 3-1\cdot(-2)\\-[1\cdot 3-0\cdot(-2)]\\1\cdot 1-0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

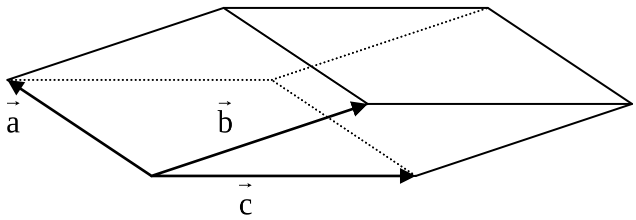
2. Anwendungen

- Flächeninhalt eines Parallelogramms/Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$ erzeugt wird:

  $A_P = |\vec{a}\times\vec{b}|$ bzw. $A_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$



- Volumen eines Spats, der von den Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ erzeugt wird:
  $V = (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}$



§07. Die Kugel

Alle Punkte $X(x_1|x_2|x_3)$, die von einem Punkt $M(m_1|m_2|m_3)$ einen festen Abstand $r > 0$ haben, liegen auf der Kugeloberfläche (im Raum) bzw. Kreislinie (in der Ebene) um M mit Radius r.

Gleichung: $\left|\vec{X}-\vec{M}\right| = r$

bzw.:

Kugel- bzw. Kreisgleichung (Mittelpunkt M, Radius r):

$\left(\vec{X}-\vec{M}\right)^2 = r^2$ (vektorielle Form)

$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$ (Koordinatenform)

Beispiel:

Für welche c liegt der Punkt C(4|2|c) auf der Kugeloberfläche der Kugel um M(2|2|3) mit Radius $\sqrt{5}$?

① Kugelgleichung

$$\left(\vec{X}-\vec{M}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right)^2 = \sqrt{5}^2$$

(Hier nicht gefragt: Kugel in Koordinatenform: $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 = 5$)

② Ortsvektor von Punkt C für $\vec{x}$ einsetzen und vereinfachen:

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right)^2 = \sqrt{5}^2 \ ; \quad \begin{pmatrix}2\\0\\c-3\end{pmatrix}^2 = 5$$

$4 + (c - 3)^2 = 5$

$4 + c^2 - 6c + 9 = 5$

$c^2 - 6c + 8 = 0$

$(c - 4)(c - 2) = 0$

Für $c_1 = 4$; $c_2 = 2$ liegt C auf der Kugel.

Hinweis:

Für Punkte C außerhalb der Kugel gilt die Ungleichung $4 + (c - 3)^2 > 5$, bzw. $(c - 4)(c - 2) > 0$

Für Punkte C innerhalb der Kugel gilt die Ungleichung $4 + (c - 3)^2 < 5$, bzw. $(c - 4)(c - 2) < 0$

Lösen der Ungleichung z. B. mit VZ-Tabelle

		2	4
(c – 2)	–	+	+
(c – 4)	–	–	+
(c – 2)(c – 4)	+	–	+

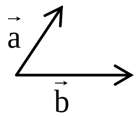
§08. Lineare Abhängigkeit

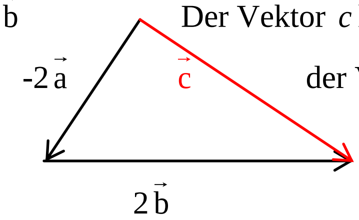
<u>Definition:</u>

Den Ausdruck $\lambda_1 \cdot \vec{a_1} + \lambda_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a_n}$ (mit $\lambda_1; \lambda_2; \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$) nennt man *Linearkombination* der Vektoren $\vec{a_1}; \vec{a_2}; \ldots; \vec{a_n}$

<u>Beispiel:</u>

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$





Der Vektor $\vec{c}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schreiben:

$\vec{c} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$

<u>Definition:</u>

Gegeben sind n Vektoren $\vec{a_1}; \vec{a_2}; \ldots; \vec{a_n}$. Lässt sich mindestens einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen, so nennt man die Vektoren $\vec{a_1}; \vec{a_2}; \ldots; \vec{a_n}$ *linear abhängig*, ansonsten *linear unabhängig*.

<u>Beispiele:</u>

a) 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

- Zur Überprüfung verwendet man die Beziehung $\vec{a} = \lambda \vec{b}$
  Erhält man in jeder Zeile denselben Wert, so sind die Vektoren linear abhängig, erhält man in mindestens 2 Zeilen verschiedene Werte oder in einer Zeile eine falsche Aussage (z.B. 1 = 0), so sind die Vektoren linear unabhängig.

  geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = -0,5 \\ \Rightarrow \lambda = -0,5 \\ \Rightarrow \lambda = -0,5 \end{matrix}$ also: $\vec{a}; \vec{b}$ lin. abhängig

  geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = -0,5 \\ \Rightarrow \lambda = 1 \\ \Rightarrow 3 = 0 \ (f) \end{matrix}$ also: $\vec{a}; \vec{b}$ lin. unabhängig

- Zwei linear abhängige Vektoren besitzen dieselbe Richtung (sie sind *parallel* bzw. *kollinear*)

- Die Repräsentanten zweier (auch unabhängiger) Vektoren kann man immer in eine Ebene legen (die beiden Vektoren sind stets *komplanar*)

b) 3 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

- Zur Überprüfung verwendet man die Beziehung $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$
  Man erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den zwei Unbekannten λ und μ. Hierzu löst man zwei Gleichungen und muss die beiden Unbekannten in die 3. Gleichung einsetzen. Entsteht beim Einsetzen eine wahre Aussage (z.B. 0 = 0), so sind die Vektoren linear abhängig.
  Entsteht beim Lösen an irgendeiner Stelle eine falsche Aussage, so sind die Vektoren linear unabhängig.

  geg.: $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix}5\\10\\6\end{pmatrix}$

  Lösung: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}5\\10\\6\end{pmatrix}$ $\quad$ (I) $1 = \lambda + 5\mu$ (II) $2 = 2\lambda + 10\mu$ (III) $3 = 6\mu$

  Am einfachsten sind die Gleichungen (I) und (III) zu lösen. (Hier Einsetzverfahren verwenden)
  Aus (III) folgt: $\mu = 0{,}5$
  μ in (I) $\quad 1 = \lambda + 2{,}5 \quad \Rightarrow \lambda = -1{,}5$
  Nun muss man in die *verbleibende* Gleichung (II) *beide* Werte einsetzen:
  λ, μ in (II) $\quad 2 = 2\cdot(-1{,}5) + 10\cdot 0{,}5$
  $2 = -3 + 5$
  $2 = 2$ (w)
  Vektoren linear abhängig.

  geg.: $a = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}$

  Lösung: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}$ $\quad$ (I) $1 = \lambda$ (II) $2 = 2\lambda + \mu$ (III) $3 = 6\mu \Rightarrow \mu = 0{,}5$

  Hier stehen die Lösungen für die Parameter schon da. Also muss man nur noch in die verbleibende Gleichung (II) beide Werte einsetzen:
  λ, μ in (II) $\quad 2 = 2\cdot 1 + 0{,}5$
  $2 = 2{,}5$ (f)

  Vektoren linear unabhängig.

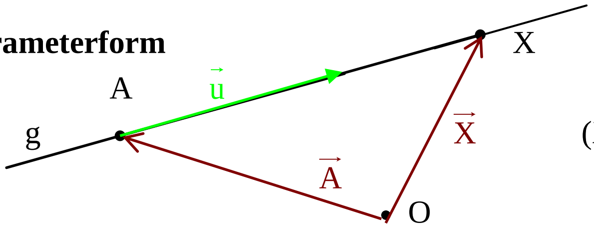
- Die Repräsentanten von drei linear abhängigen Vektoren kann man immer in eine Ebene legen (drei linear abhängige Vektoren sind stets *komplanar*)

Weitere Eigenschaften:

- In der Ebene gibt es maximal 2 linear unabhängige Vektoren („2-dimensional“)
- Im Raum gibt es maximal 3 linear unabhängige Vektoren („3-dimensional“)

§09. Die Gerade

1. Parameterform



(X ist beliebiger Punkt auf g)

Um eine Gerade festzulegen, benötigt man
- den Ortsvektor $\vec{A}$ eines festen, beliebigen Punktes der Geraden (*Aufhängepunkt*) und
- einen Vektor $\vec{u}$, der die Richtung der Gerade angibt (*Richtungsvektor RV*):

Gleichung in Parameterform: g: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$

Beispiele:

① x_1 – Achse des Koordinatensystems der Ebene:

Aufhängepunkt ist hier: O(0|0);

Richtungsvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Also: g: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

② Gerade g durch die Punkte A(2|5|3) und B(0|1|3)

Aufhängepunkt ist hier: A(2|5|3);

Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 1 - 5 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: Bei einem RV kommt es nur auf die Richtung an, nicht auf Länge oder Orientierung. Deshalb kann man einen möglichst einfachen Vektor, der die vorgegebene Richtung hat, verwenden. Hier wird das erreicht, indem der Vektor $\overrightarrow{AB}$ durch den gemeinsamen Faktor aller Koordinaten, nämlich –2 dividiert wird. Damit erhält man einen anderen Vektor $\vec{u}$, der die gewünschte Eigenschaft hat.

Also: g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Gegenseitige Lage zweier Geraden g und h:

g: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ h: $\vec{X} = \vec{B} + \mu\vec{v}$

① Sind die RV $\vec{u}, \vec{v}$ der beiden Geraden linear abhängig? Ansatz: $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

JA

Das bedeutet die Richtungen der Geraden sind gleich.

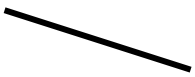
② Liegt der Aufhängepunkt (z.B. A) der einen Gerade auch auf der anderen Gerade (also auf h)?

Ansatz: $\vec{A} = \vec{B} + \mu\vec{v}$ oder $\vec{A} - \vec{B} = \mu\vec{v}$

JA

Die Geraden sind *identisch*

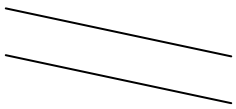
$g \equiv h$



NEIN

Die Geraden sind *echt parallel*

$g \parallel h$



NEIN

Das bedeutet die Geraden haben unterschiedliche Richtungen.

② Haben die Geraden einen gemeinsamen Punkt (Ermitteln durch Einsetzen von g in h bzw. Gleichsetzen der Terme)?

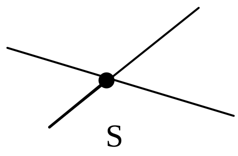
Ansatz: $\vec{A} + \lambda\vec{u} = \vec{B} + \mu\vec{v}$

Oder: $\vec{A} - \vec{B} = \mu\vec{v} - \lambda\vec{u}$

JA

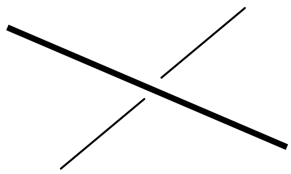
Die Geraden haben *einen Schnittpunkt S*

$g \cap h = \{S\}$



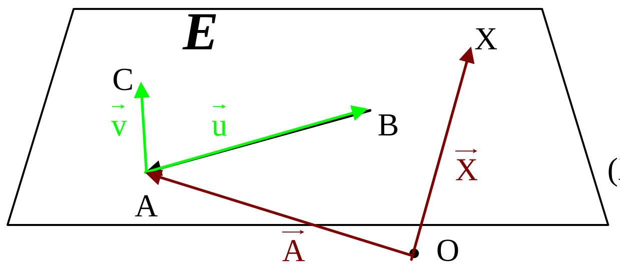
NEIN

Die Geraden sind *windschief*



§10. Die Ebene

1. Parameterform



(X ist beliebiger Punkt auf E)

Um eine Ebene festzulegen, benötigt man
- den Ortsvektor $\vec{A}$ des Aufhängepunkts und
- zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Gleichung in Parameterform: E: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Beispiele:

a) $x_1 - x_2$ – Ebene des Koordinatensystems im Raum: (Vgl. §02)

Aufhängepunkt ist hier der Ursprung O(0|0|0)

Richtungsvektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig

$\vec{u}$ verläuft in Richtung der x_1-Achse, $\vec{v}$ in Richtung der x_2-Achse

Also: E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder vereinfacht: E: $\vec{X} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

b) Ebene durch die Punkte A(1|2|3) und B(5|–2|–5) C(0|1|1)

Aufhängepunkt ist hier: A(1|2|3)

Richtungsvektoren: • $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5 - 1\\-2 - 2\\-5 - 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-8\end{pmatrix}$ => $\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

• $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0 - 2\\1 - 5\\1 - 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}$ => $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabh.

Also: E: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

2. Normalenvektor

Ein Vektor $\vec{n}$, der auf einer Ebene senkrecht steht, heißt Normalenvektor der Ebene

Bestimmung des Normalenvektors *mit Vektorprodukt* $\vec{u}\times\vec{v}$ (vgl. §06)

Beispiel:

$$E:\ \vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix};\qquad \vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot3-1\cdot(-2)\\-[1\cdot3-0\cdot(-2)]\\1\cdot1-0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix};\qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Hinweis: Auch bei $\vec{n}$ kommt es nur auf die Richtung, nicht auf Länge und Orientierung an. Man kann also $\vec{u}\times\vec{v}$ durch eine beliebige Zahl dividieren/multiplizieren, um den Vektor $\vec{n}$ zu erhalten.

3. Normalenform

Eine Ebene E kann (im Raum) durch folgende Gleichung beschrieben werden:

E: $\vec{n}\circ(\vec{X}-\vec{A}) = 0$ (NF) dabei ist $\vec{n}$ der Normalenvektor von E

Benötigt wird hier

– der Ortsvektor $\vec{A}$ eines beliebigen Punktes A auf E (z.B. Aufhängepunkt)

– ein Normalenvektor $\vec{n}$ von E

Jeder Gleichung ist eindeutig eine Ebene zugeordnet. Jedoch ist nicht einer Ebene eindeutig eine Gleichung zugeordnet (Normalenvektor kann in Länge und Orientierung noch variieren.)

Beispiel:

Ebene E aus 2. $\quad \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{A}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$

Einsetzen in $\vec{n}\circ(\vec{X}-\vec{A}) = 0$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\circ\left[\vec{X}-\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}\right]=0 \qquad\qquad \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\circ\vec{X}-\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\circ\vec{X}-8=0$$

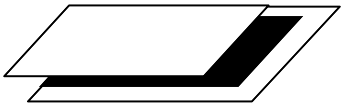
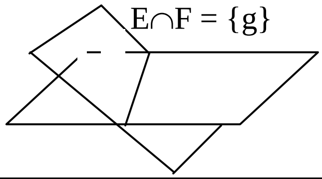
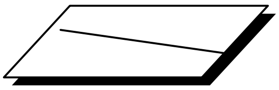
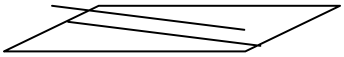
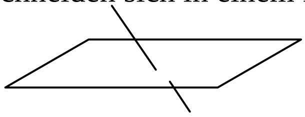
$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$ (NF) (*Normalenform in Koordinatendarstellung*)

Besondere Ebenen: (Vgl. §02)

$x_3 = 0$	x_1-x_2-Ebene (enthält Ursprung)	*x_3-Koordinate eines jeden Punktes ist 0*
$x_2 = 6$	Parallel zu x_1-x_3-Ebene im Abstand 6	*x_2-Koordinate eines jeden Punktes ist 6*
$x_1 + x_3 + 5 = 0$	Parallel zu x_2-Achse	*x_2-Koordinate fehlt*
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$	Ebene enthält den Ursprung	*Konstante Zahl >0 fehlt*

4. Gegenseitige Lage von 2 Ebenen E und F bzw. einer Gerade g und einer Ebene E

3 Möglichkeiten:

E und F sind identisch	E und F sind echt parallel	E und F schneiden in einer Geraden
$E \equiv F$ 	$E \parallel F$ 	$E \cap F = \{g\}$ 
g liegt in E	E und g sind echt parallel	E und g schneiden sich in einem Punkt
		

Merke:
Die Schnittgeraden einer Ebene E mit den Koordinatenebenen nennt man *Spurgeraden*, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen *Spurpunkte*.

a) Parameterform – Normalenform (Ebene-Ebene bzw. Gerade-Ebene):

Man setzt die Parameterform der einen Ebene (bzw. der Gerade) in die Normalenform der anderen Ebene ein und löst nach einem der Parameter auf.

Beispiel

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } F: 2x_1 - x_2 - 8 = 0$$

① E in F: $2\cdot(1 + \lambda + 0\mu) - (-2 + 0\lambda + 1\mu) - 8 = 0$

$2 + 2\lambda \;\; + 2 - \mu - 8 = 0$

$-4 + 2\lambda \;\; = \mu$

Hier 3 Möglichkeiten:

1	Ergebnis (z.B. wie oben, oder Zahlenwert für einen Parameter)	→	Ebenen E und F schneiden sich (g und E schneiden sich)
2	wahre Aussage	→	Ebenen sind identisch (g liegt in E)
3	falsche Aussage	→	Ebenen sind echt parallel (g und E sind parallel)

② Einsetzen von μ im E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + (-4 + 2\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

③ Auflösen der Klammer und sortieren der Vektoren:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{Schnittgerade} \quad s: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) 2 Ebenen in Normalenform (nur Ebene-Ebene):

Man löst das Gleichungssystem (3 Unbekannte aber nur 2 Gleichungen; 1 Variable frei wählbar z.B. λ; falls eine Variable in beiden Gleichungen nicht vorkommt, *muss* diese frei gewählt werden)

Beispiel: E: $2x_1 - x_3 - 4 = 0$ F: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2 = 0$

$2x_1 - x_3 = 4$ Wähle $x_3 = \lambda$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$

(I) $2x_1 = 4 + \lambda$

(II) $2x_1 - x_2 = 2 - 3\lambda$

(II)–(II) $x_2 = 2 + 4\lambda$

Einsetzen in (II):

$$2x_1 - (2 + 4\lambda) = 2 - 3\lambda$$
$$2x_1 - 2 - 4\lambda = 2 - 3\lambda$$
$$2x_1 = 4 - \lambda$$
$$x_1 = 2 - 0{,}5\lambda$$

Hier 3 Möglichkeiten:

Ergebnis für $x_1\ x_2\ x_3$ $\rightarrow$ Ebenen schneiden sich in einer Geraden

wahre Aussage $\rightarrow$ Ebenen sind identisch

falsche Aussage $\rightarrow$ Ebenen sind echt parallel

Bestimmung der Gleichung der Schnittgeraden s durch zeilenweises Einsetzen:

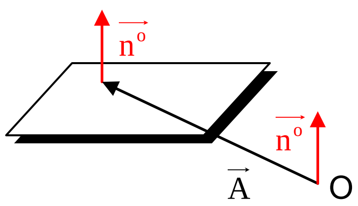
$$s:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Die Hessesche Normalenform (HNF)

Die Normalenform einer Ebene E ist nicht eindeutig, da der Normalenvektor beliebige Orientierung sowie Länge besitzt.

Verwendet man den vom Ursprung zur Ebene zeigenden Einheitsvektor $\vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ von $\vec{n}$, so erhält man die Hesseform der Normalengleichung (*HNF*) (eindeutig!): $\vec{n}^o \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

Anmerkung zur Orientierung:



Zeigt der Normalenvektor vom Ursprung zur Ebene, so liegt der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{n}$ zwischen 0° und 90°, der $\cos\varphi$ ist positiv, also auch das Skalarprodukt $\vec{A} \circ \vec{n} > 0$.

Da dieses Skalarprodukt die Konstante hinter dem „–" ergibt, muss vor der Konstante ein Minus stehen.

Beispiel:

geg.: E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (aus 1.) ges.: HNF von E

Lösung:

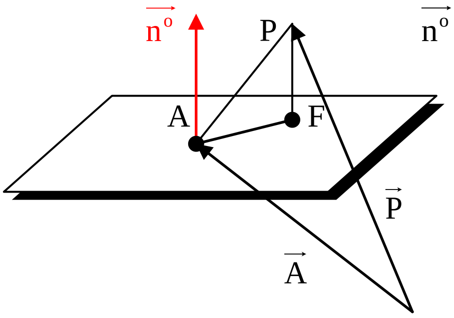
① Bestimme die NF von E (wie in 1.)
E: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$ (NF)

② Bestimme $|\vec{n}|$: $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

③ *Teile die Koordinatenform der NF durch diesen Betrag und achte darauf, dass die Konstante ein – als Vorzeichen hat. (Gegebenenfalls mit –1 multiplizieren)*

$$\frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{14}} = 0 \text{ (HNF)}$$

Anwendung:
Setzt man den Ortsvektor eines Punkts $P \notin E$ in die linke Seite der HNF:



$$\vec{n}^o \circ (\vec{P} - \vec{A}) = |\vec{n}^o| \cdot |(\vec{P} - \vec{A})| \cos\phi = \quad \text{(vgl Skalarprodukt §05 | 3.)}$$

$$= 1 \cdot \overline{AP} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{AP}} = \overline{PF}$$

Hinweise: • $\cos\varphi = \frac{\text{Ankath}}{\text{Hypoth}}$

• Länge eines Einheitsvektors ist immer 1.

> Satz:
> Eine Ebene E sei durch ihre HNF
>
> E: $\vec{n}^o \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$
>
> gegeben und ein Punkt P (mit Ortsvektor $\vec{P}$) außerhalb der Ebene, so gilt
>
> $\vec{n}^o \circ (\vec{P} - \vec{A}) = d$
>
> wobei e = |d| der Abstand d(P; E) von P zur Ebene E ist.
> Das Vorzeichen von d gibt an, ob P und der Ursprung O auf derselben Seite (d < 0) oder auf verschiedenen Seiten (d > 0) von E liegen.

Beispiel:

Bestimme den Abstand des Punktes P(1|2|3) von der Ebene E: $2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8 = 0$

① Bestimme die HNF von E (wie in 1.)

$$\frac{2x_1 - 3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{14}} = 0 \text{ (HNF)}$$

② Setze P in die linke Seite ein:

$$d(P; E) = e = \left|\frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 - 8}{\sqrt{14}}\right| = \left|\frac{-9}{\sqrt{14}}\right| = \frac{9}{\sqrt{14}}$$ (P liegt auf derselben Seite von E, wie O)

§11. Abstandsprobleme

1. Punkt–Punkt

Bestimme den Verbindungsvektor der beiden Punkte P und Q und berechne seinen Betrag.

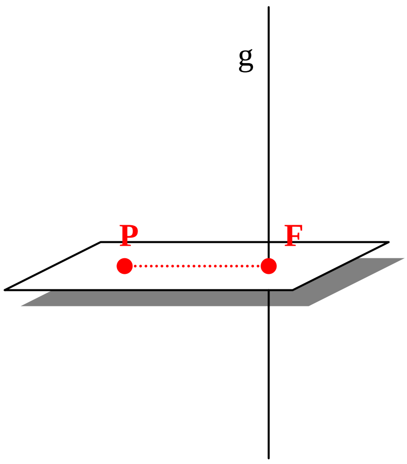
$d(P;Q) = |\vec{Q} - \vec{P}|$

2. Punkt–Gerade

① Bestimme die Normalenform einer Hilfsebene H, die P enthält und senkrecht zur Geraden g steht. (Hier ist der RV der Geraden der Normalenvektor und P der Aufhängepunkt)

② Bestimme durch Einsetzen von g in die Ebene den Schnittpunkt F von Ebene und Gerade
Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lots von P auf g.

③ Der Abstand d(P;g) ist dann $|\overrightarrow{PF}|$



Beispiel:

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ P(0 | 1 | 2)

① $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$

H: $x_1 + 2x_3 - 4 = 0$ (NF)

② g in H: $3 + \mu + 2(3 + 2\mu) - 4 = 0 \Rightarrow \mu = -1$

μ in g: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ F(2 | 2 | 1)

③ $d(P;g) = |\overrightarrow{PF}| = \left| \begin{pmatrix} 2-0 \\ 2-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6}$

3. Punkt–Ebene

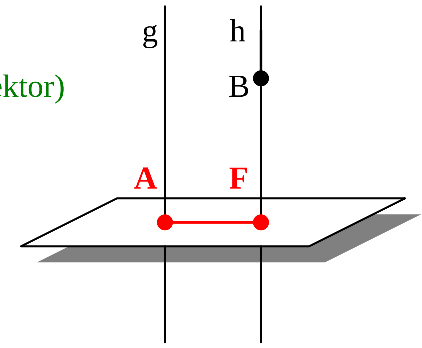
Einsetzen von P in die linke Seite der HNF der Ebene (vgl. §10 | 5.)

4. Gerade–Gerade

a) Parallel Wie bei 2.:

- Hilfsebene H, die senkrecht auf die Geraden steht (RV ist Normalenvektor) und den Aufhängepunkt A der einen Geraden g enthält;
- Schnittpunkt F von Hilfsebene und der anderen Geraden h bestimmen.

  d(g;h) = $\left|\overrightarrow{AF}\right|$



b) Windschief

① Hilfsebene E in Parameterform, die g enthält und || zu h ist (RV von g und h verwenden)

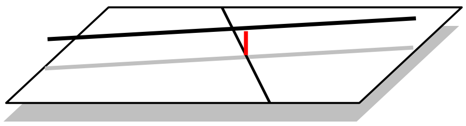
② HNF von E ermitteln

③ Aufhängepunkt von h in linke Seite der HNF einsetzen (denn der Abstand des Geradenaufhängepunkts und E ist der gesuchte)

Beispiel: Zeige, dass die Geraden

$$g:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

windschief sind und bestimme dann ihren Abstand.



Lösung:

Teil a) g und h windschief: (vgl. §09 | 2.)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 4 = 0 \ \ (f)$$

RV linear unabhängig

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \text{I.}\ \ -2 = -4\lambda \ \Rightarrow\ \lambda = 0{,}5 \\ \Rightarrow \text{II.}\ -6 = \mu - 3\lambda \Rightarrow -6 = \mu - 1{,}5 \Rightarrow \mu = -4{,}5 \\ \Rightarrow \text{III.}\ 1 = 2\mu + 2\lambda \Rightarrow 1 = 2\mu + 2\lambda \end{array}$$

λ und μ in III $1 = 2\cdot 0{,}5 - 2\cdot(-4{,}5)$
$1 = 10 \quad (f)$

⇒ g und h sind windschief.

<u>Teil b)</u> Abstand:

① E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = 3$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 6 = 0 \qquad \text{(NF)}$

$\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - 2 = 0 \qquad \text{(HNF)}$

③ $d\,(g;\, h) = \left|\frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 1 - 2\right| = \left|\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} - 2\right| = |-3| = 3$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden beträgt 3.

5. Gerade–Ebene

„Abstand" macht nur Sinn, wenn man zuvor gezeigt hat, dass Gerade und Ebene parallel sind

Dann bestimmt man den Abstand des Aufhängepunkts der Geraden von der Ebene:

① HNF der Ebene bestimmen

② Aufhängepunkt der Gerade in linke Seite der HNF einsetzen und vereinfachen.

6. Ebene–Ebene

„Abstand" macht nur Sinn, wenn man zuvor gezeigt hat, dass die Ebenen parallel sind

Dann bestimmt man den Abstand eines beliebigen Punktes der einer der Ebenen von der anderen Ebene:

① HNF der einen Ebene bestimmen

② Aufhängepunkt der anderen Ebene in linke Seite der HNF einsetzen und vereinfachen.

7. Kugel (im Raum) und Kreis (in der Ebene)

Alle Punkte X, die von einem Punkt M einen festen Abstand $r > 0$ haben, liegen auf der Kugeloberfläche bzw. Kreislinie um M mit Radius r. (vgl. §07)

Gleichung: $|\vec{X} - \vec{M}| = r$

Beispiel:
Bestimme die gegenseitige Lage der Gerade

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

und des Kreises um M(1|1) mit Radius r = $2\sqrt{2}$.

Lösung:
Kreisgleichung bestimmen:

k: $\left| \vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{2}$ bzw. k: $\left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 8$

Gerade in Kreis einsetzen und vereinfachen:

g in k: $\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 8$

$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 8$

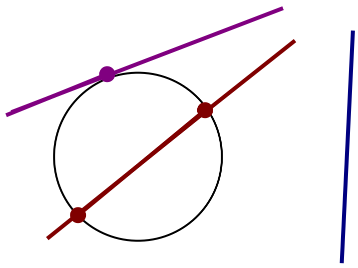
$(3 + \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 = 8$

$9 + 6\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 8$

$2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$

Interpretation::

keine Lösung: Gerade ist Passante (kein Schnittpunkt)
genau 1 Lösung: Gerade ist Tangente (1 Berührpunkt)
genau 2 Lösung: Gerade ist Sekante (2 Schnittpunkte)



$2(\mu + 1)^2 = 0$ => $\mu = -1$ Gerade ist Tangente an den Kreis,

Berührpunkt: $\vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ => B(3|3)

8. Einsetzen oder Gleichsetzen?
PF: Parameter-; NF: Normalenform

Gegeben:	Vorgang:
NF – PF	PF in NF einsetzen
PF – PF	PF und PF „gleichsetzen“ (bei 2 Ebenen besser: eine Ebene in NF verwandeln)
NF – NF	beide NF als GLS mit 2 Gleichungen lösen (bei 3 Unbekannten: 1 frei wählbar)

§12. Winkel

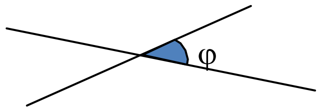
1. Wiederholung

Der *Zwischenwinkel* φ *zweier Vektoren* $\vec{a}$ und $\vec{b}$ errechnet sich nach der Formel:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{a\cdot b}} \qquad \text{mit } a = |\vec{a}| \text{ und } b = |\vec{b}|$$ (vgl. §05 | 6.)

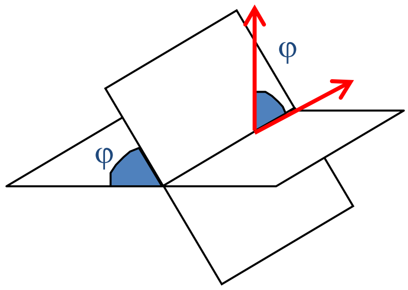
Setzt man die Richtungsvektoren zweier Geraden in diese Formel ein, so erhält man den Schnittwinkel der beiden Geraden. Dabei ist zu beachten, dass mn immer denjenigen Winkel verwendet der zwischen 0° und 90° liegt, also für den der cos größer oder gleich Null ist:

$$\boxed{\cos\varphi = \left|\frac{\vec{u}_1\circ\vec{u}_2}{u_1\cdot u_2}\right|} \qquad \text{mit } u_1 = |\vec{u_1}| \text{ und } u_2 = |\vec{u_2}|$$



Mit der NF einer Ebene können nun auch Zwischenwinkel zweier Ebenen oder einer Ebene/Gerade bestimmt werden.

2. Winkel zwischen zwei Ebenen E und F



E: $\vec{n}_1\circ(\vec{x}-\vec{a}) = 0$ (NF)

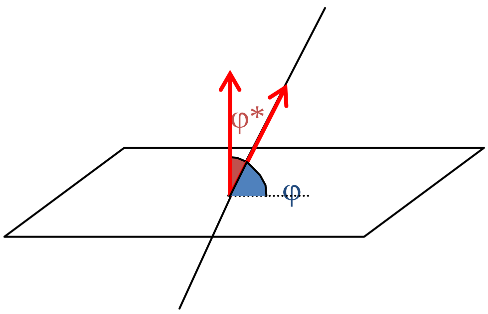
F: $\vec{n}_2\circ(\vec{x}-\vec{b}) = 0$ (NF)

Der Zwischenwinkel von E und F ist so groß wie der Zwischenwinkel der beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$

Also setzt man diese in die Formel ein und erhält für den *Zwischenwinkel* φ *zweier Ebenen*:

$$\boxed{\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n_1}\circ\vec{n_2}}{n_1\cdot n_2}\right|} \qquad \text{mit } n_1 = |\vec{n}_1| \text{ und } n_2 = |\vec{n}_2|$$

3. Winkel zwischen einer Gerade g und einer Ebene E



E: $\vec{n}\circ(\vec{x}-\vec{a}) = 0$(NF)

g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$

Verwendet man den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Gerade, so stellt man fest dass der Winkel φ* zwischen diesen n i c h t der Winkel zwischen Ebene und Gerade ist. Der gesuchte Winkel φ und φ* ergänzen sich jedoch zu 90°.

Also gilt: **$\varphi^* = 90° - \varphi$.**

Außerdem ist $\cos\varphi^*$ = **$\cos(90°-\varphi) = \sin\varphi$**
und man kann somit den Winkel φ zwischen Gerade und Ebene mit folgender Formel bestim–men:

$$\boxed{\sin\varphi = \left|\frac{\vec{n}\circ\vec{u}}{n\cdot u}\right|} \qquad \text{mit } n = |\vec{n}| \text{ und } u = |\vec{u}|$$

§13. Weitere Anwendungen

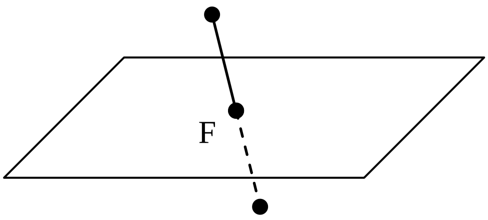
1. Lotfuß- und Spiegelpunkt

Um den *Lotfußpunkt F* eines Lots von einem Punkt auf eine Ebene zu bestimmen, verfährt man so:

① Stelle die Gleichung der Lotgerade von P auf E (Aufhängepunkt ist P und der RV ist der Normalenvektor der Ebene).

② Schneide die Gerade mit der Ebene (der gesuchte Fußpunkt ist der Schnittpunkt).

Anmerkung: Fußpunkt eines Lots auf eine Gerade: → Abstand Punkt-Gerade (vgl. §11 | 2.)



③ Der *Spiegelpunkt P‘* ergibt sich (sowohl bei Spiegelung an Gerade, als auch an Ebene) aus: $\vec{P}' = \vec{P} + 2\overrightarrow{PF}$ oder $\vec{P}' = \vec{F} + \overrightarrow{PF}$

Dazu muss immer zuerst der Fußpunkt berechnet werden!

Beispiel: E: $2x_1 + x_3 - 14 = 0$ P(4|2|1)

① Lotgerade: $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② *l* in E einsetzen: $2(4 + 2\lambda) + (1 + \lambda) - 14 = 0$; $\lambda = 1$; F (6|2|2)

③ Spiegelpunkt: $\vec{P}' = \vec{F} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-4 \\ 2-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ P‘ (8|2|3)

2. Geometrische Figuren in der Vektorrechnung

Parallelogramm: Gegenüberliegende Seitenvektoren haben dieselbe Richtung und denselben Betrag und die Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

Zeige:
- ▶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ▶ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind linear unabhängig

Rechteck: Parallelogramm, aber ein Eckwinkel ist 90° (damit sind alle 4 Winkel 90°)

Zeige:
- ▶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ▶ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ (rechter Winkel bei A)

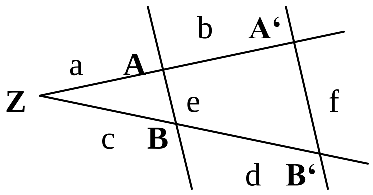
Quadrat: Rechteck, 2 nebeneinanderliegende Seiten (damit alle 4) gleichlang

Zeige:
- ▶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- ▶ $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ (rechter Winkel bei A)
- ▶ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ (An A anliegende Seiten gleichlang)

Dreieck: Punkte liegen nicht auf einer Geraden (lineare Unabhängigkeit zweier Seitenvektoren)

Zeige: ▶ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind linear unabhängig

3. Anwendung des Strahlensatzes



Es gelten die Beziehungen

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ohne parallele Seiten)
- $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$ (mit parallelen Seiten – Start bei Z)

Weiter gilt:

- Streckungsfaktor, mit dem der Punkt A auf A‘ (aber auch B auf B‘ oder die Strecke e auf f) bei der zentrischen Streckung an Z abgebildet wird: $k = \frac{a+b}{a}\left(= \frac{c+d}{c} = \frac{f}{e}\right)$
- Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ZA’B‘ und ZAB: $\frac{A_{\Delta ZA'B'}}{A_{\Delta ZAB}} = k^2$

  → Verhältnis der Teilflächen (Dreieck ZAB zu Trapez ABB’A‘):

  Bedenken, dass gilt: $A_{\Delta ZA'B'} = A_{\Delta} + A_{Trapez}$
- Verhältnis der Volumina zweier Pyramiden (bzw. Kegel), die durch eine Ebene in 2 Teile geteilt werden, so dass obige Figur ein Schnitt durch die Pyramide/Kegel ist: $\frac{V'}{V} = k^3$

  → Verhältnis der Teilvolumina (Spitze zu Pyramidenstumpf):

  Bedenken, dass gilt: $V_{Pyramide} = V_{Spitze} + V_{Stumpf}$

Beispiel:

Eine Pyramide wird durch eine Ebene parallel zur Grundfläche auf einem Drittel der Höhe geschnitten. Wie verhalten sich die Volumina der beiden entstehenden Teilkörper?

Faktor: $k = 3/2$ (Höhe große Pyramide zu Höhe kleiner Pyramide)
Volumenverhältnis: $k^3 = 27/8$

Also ist das Volumen der gesamten Pyramide 27/8 mal so groß wie das der kleinen Pyramide. Damit ist der Stumpf (27/8 – 1)-mal so groß wie die kleine Pyramide. Also: $\frac{V_{Pyramide(klein)}}{V_{Stumpf}} = \frac{1}{\frac{27}{8}-1} = \frac{1}{\frac{19}{8}} = \frac{8}{19}$